ΜΑΘΗΜΑ 46
ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2^{η} ΔΕΚΑΔΑ

11.

Για συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ισχύει
$f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x)=x^3-2x^2+6x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\beta^2<3\gamma$.
Δείξτε ότι :
i) Η f δεν έχει ακρότατα.
ii) Η f είναι γνησίως αύξουσα.
iii) Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Προτεινόμενη λύση

i)

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αν είχε ακρότατο σε θέση έστω ξ, με βάση το θεώρημα Fermat, θα ήταν $f'(\xi)=0$ **(1)**

$$f^3(x)+\beta\cdot f^2(x)+\gamma\cdot f(x)=x^3-2x^2+6x-1 \Rightarrow$$

$$\left(f^3(x)+\beta\cdot f^2(x)+\gamma\cdot f(x)\right)'=\left(x^3-2x^2+6x-1\right)'$$

$$3f^2(x)\,f'(x)+2\beta\, f(x)f'(x)+\gamma\, f'(x)=3x^2-4x+6 \quad \textbf{(2)}$$

Για $x=\xi$ παίρνουμε $3f^2(\xi)\,f'(\xi)+2\beta\, f(\xi)f'(\xi)+\gamma\, f'(\xi)=3\xi^2-4\xi+6 \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$$3\xi^2-4\xi+6=0 \quad \textbf{(3)}$$

$\Delta=-56<0$, άρα η εξίσωση (3) είναι αδύνατη, δηλαδή δεν υπάρχει ο ξ, άρα η f δεν έχει ακρότατο.

ii)

$$(2) \Leftrightarrow f'(x)\left[3f^2(x)+2\beta\, f(x)+\gamma\right]=3x^2-4x+6 \quad \textbf{(4)}$$

Το τριώνυμο $3x^2-4x+6$ έχει $\Delta=-56<0$, άρα είναι θετικό.

Η ποσότητα $3f^2(x)+2\beta\, f(x)+\gamma$, θεωρούμενη σαν τριώνυμο $2^{ου}$ βαθμού ως προς $f(x)$ έχει $\Delta=4\beta^2-12\gamma=4(\beta^2-3\gamma)<0$, αφού $\beta^2<3\gamma$, άρα είναι θετική

Οπότε, από την (4) προκύπτει ότι $f'(x)>0$, συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα

iii)

Η f σαν παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής στο $[0, 1]$

Η υπόθεση $f^3(x)+\beta\cdot f^2(x)+\gamma\cdot f(x)=x^3-2x^2+6x-1$ για $x=0$ δίνει

$$f^3(0)+\beta\cdot f^2(0)+\gamma\cdot f(0)=-1$$

$$f(0)\left[f^2(0)+\beta\cdot f(0)+\gamma\right]=-1<0 \quad \textbf{(5)}$$

Το τριώνυμο $f^2(0)+\beta\cdot f(0)+\gamma$ έχει $\Delta = \beta^2 - 4\gamma$

Από υπόθεση έχουμε $\beta^2 < 3\gamma \Rightarrow \gamma > \dfrac{\beta^2}{3} \geq 0$

άρα $\beta^2 < 4\gamma$, αφού $\gamma > 0$

άρα $\beta^2 - 4\gamma < 0 \Rightarrow \Delta < 0$

Επομένως το τριώνυμο $f^2(0)+\beta\cdot f(0)+\gamma$ είναι θετικό

(5) $\Rightarrow$ $f(0) < 0$

Η υπόθεση $f^3(x)+\beta\cdot f^2(x)+\gamma\cdot f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ για $x = 1$ δίνει

$$f^3(1)+\beta\cdot f^2(1)+\gamma\cdot f(1) = 4$$

$$f(1)\left[\,f^2(1)+\beta\cdot f(1)+\gamma\,\right] = 4 \quad \textbf{(6)}$$

Είναι $f^2(1)+\beta\cdot f(1)+\gamma < 0$ αφού έχει $\Delta = \beta^2 - 4\gamma < 0$ (αποδείχθηκε) ,
(6) $\Rightarrow$ $f(1) > 0$

Τελικά είναι $f(0)f(1) < 0$, άρα με βάση το θεώρημα Bolzano ,

θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (0,\ 1)$ ώστε $f(x_o) = 0$.

Επειδή δε η f είναι γνησίως αύξουσα, το x_o είναι μοναδικό

12.

Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f(x) \neq 0$ και

$f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 t\, f^2(xt)dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Χωρίς μολύβι και χαρτί δε γίνεται τίποτα

Έστω ακόμα η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{1}{f(x)} - x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

A. Δείξτε ότι : **i)** $f'(x) = -2xf^2(x)$

ii) Η g είναι σταθερή

iii) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

B. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}(x \cdot f(x) \cdot \eta\mu 2x)$

Προτεινόμενη λύση

A.

i)

$f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 t\, f^2(xt)dt \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 1 - 2\int_0^1 x^2 t\, f^2(xt)dt$

Θέτουμε $x\,t = u$ οπότε $x\,dt = du$

Νέα άκρα : Για $t = 0$ είναι $u = 0$

Για $t = 1$ είναι $u = x$

Οπότε $f(x) = 1 - 2\int_0^x u\, f^2(u)\, du$

Η εμφάνιση των f(xt)
f(x – c)
οδηγεί σε ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, το ολοκλήρωμα είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση,

οπότε παραγωγίζοντας έχουμε $f'(x) = -2xf^2(x)$

ii)

$$g'(x) = \frac{-f'(x)}{f^2(x)} - 2x = \frac{2xf^2(x)}{f^2(x)} - 2x = 0, \quad \text{επομένως} \quad g(x) = c$$

iii)

$g(x) = c \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(x)} - x^2 = c \quad$ **(1)**

Η υπόθεση $f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 t\, f^2(xt)dt$, για $x = 0$, δίνει $f(0) = 1$

Η (1), για $x = 0$ δίνει $\dfrac{1}{f(0)} = c \Rightarrow \dfrac{1}{1} = c \Rightarrow c = 1$

Η (1) γίνεται $\dfrac{1}{f(x)} - x^2 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(x)} = 1 + x^2 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

B.

iv)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(xf(x)\eta\mu 2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\frac{1}{x^2+1}\eta\mu 2x\right)$$

Στα τριγωνομετρικά όρια υποπτευόμαστε κριτήριο παρεμβολής

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}\eta\mu 2x\right)$$

Είναι $\left|\frac{x}{x^2+1}\cdot\eta\mu 2x\right| = \left|\frac{x}{x^2+1}\right|\left|\eta\mu 2x\right| \le \left|\frac{x}{x^2+1}\right| . 1 \quad \Rightarrow$

$$\left|\frac{x}{x^2+1}\cdot\eta\mu 2x\right| \le \left|\frac{x}{x^2+1}\right|$$

$$-\left|\frac{x}{x^2+1}\right| \le \frac{x}{x^2+1}\cdot\eta\mu 2x \le \left|\frac{x}{x^2+1}\right|$$

Όμως $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ και $\lim_{x\to+\infty}\left(-\left|\frac{x}{x^2+1}\right|\right) = 0$

Άρα , με βάση το κριτήριο της παρεμβολής , θα είναι και $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}\eta\mu 2x\right) = 0$

13.

Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=2^{12}(e^{-4x}-e^{-\alpha x})$, $x\geq 0$, $\alpha>4$

i) Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=h(0)=0$

ii) Να μελετήσετε την h ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

iii) Αν x_1 ρίζα της $h'(x)$ και x_2 ρίζα της $h''(x)$, δείξτε ότι $x_2=2x_1$.

«Βιδωνόμαστε » στην εκφώνηση

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} 2^{12}(e^{-4x}-e^{-\alpha x}) = 2^{12}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{4x}}-\frac{1}{e^{\alpha x}}\right)$$

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{4x}=+\infty$ και επειδή $\alpha>4$ είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\alpha x}=+\infty$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{4x}}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{\alpha x}}$

Επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=2^{12}\cdot 0=0$

Επίσης $h(0)=2^{12}(e^{0}-e^{0})=0$

ii)

$h'(x) = 2^{12}(-4e^{-4x}+\alpha e^{-\alpha x})$

$$h'(x)>0 \Leftrightarrow 2^{12}(-4e^{-4x}+\alpha e^{-\alpha x})>0$$

$$-4e^{-4x}+\alpha e^{-\alpha x}>0$$

$$4e^{-4x}<\alpha e^{-\alpha x}$$

$$\frac{e^{-4x}}{e^{-\alpha x}}<\frac{\alpha}{4}$$

$$e^{\alpha x-4x}<\frac{\alpha}{4} \Leftrightarrow \ln e^{\alpha x-4x}<\ln\frac{\alpha}{4}$$

$$\alpha x-4x<\ln\alpha-\ln4$$

$$x(\alpha-4)<\ln\alpha-\ln4$$

$$x<\frac{\ln\alpha-\ln4}{\alpha-4}$$

Πρόσημο της h' και μονοτονία της h

x	0	$\frac{\ln\alpha-\ln4}{\alpha-4}$	$+\infty$
h'	$+$	0	$-$
h	↗	|	↘

Η h παρουσιάζει μέγιστο στη θέση $x_1=\dfrac{\ln\alpha-\ln4}{\alpha-4}$

$$\text{το} \quad f(x_1) = 2^{12}\left[\left(\frac{4}{\alpha}\right)^{\frac{4}{\alpha-4}} - \left(\frac{4}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-4}}\right]$$

και ελάχιστο για $x = 0$, το $h(0) = 0$

iii)

$h''(x) = 2^{12}(16e^{-4x} - \alpha^2 e^{-\alpha x})$

$$h''(x) = 0 \iff 2^{12}(16e^{-4x} - \alpha^2 e^{-\alpha x}) = 0$$

$$16e^{-4x} - \alpha^2 e^{-\alpha x} = 0$$

$$16e^{-4x} = \alpha^2 e^{-\alpha x}$$

$$\frac{e^{-4x}}{e^{-\alpha x}} = \frac{\alpha^2}{16}$$

$$e^{\alpha x - 4x} = \frac{\alpha^2}{16} \iff \ln e^{\alpha x - 4x} = \ln\frac{\alpha^2}{16}$$

$$\alpha x - 4x = \ln\alpha^2 - \ln 16$$

$$x(\alpha - 4) = 2\ln\alpha - 2\ln 4$$

$$x_2 = \frac{2(\ln\alpha - \ln 4)}{\alpha - 4}$$

Οπότε $x_2 = 2x_1$

14.

Έστω η παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ συνάρτηση f, με $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$ και $f(0) = 2$, $f(1) = 4$. Δείξτε ότι :

i) Η ευθεία $y = 3$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε ένα ακριβώς σημείο $x_o \in (0,1)$

ii) Υπάρχει $x_1 \in (0, 1)$, ώστε $f(x_1) = \dfrac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$

iii) Υπάρχει $x_2 \in (0, 1)$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(x_2, f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 2005$.

Προτεινόμενη λύση

i)

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 3$ έχει μία μόνο λύση στο $(0, 1)$

Έστω η συνάρτηση $g(x) = f(x) - 3$, $x \in [0, 1]$

Η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$, αφού η f είναι παραγωγίσιμη σε αυτό.

$g(0) = f(0) - 3 = 2 - 3 = -1 < 0$

$g(1) = f(1) - 3 = 4 - 3 = 1 > 0$

Άρα $g(0)g(1) < 0$

Επομένως, από το θεώρημα Bolzano, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (0,1)$ έτσι ώστε $g(x_o) = 0 \Leftrightarrow f(x_o) = 3$

Και επειδή $g'(x) = f'(x) > 0$. η g είναι γνησίως αύξουσα, άρα η ρίζα μοναδική

ii)

Αναζητάμε ρίζα της εξίσωσης $f(x) = \dfrac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$

Η εμφάνιση πολλών τιμών της f οδηγεί σε Bolzano. Τα Rolle και Θ.Μ.Τ απαιτούν δύο τιμές

$$4f(x) = f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$4f(x) - \left[f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)\right] = 0$$

Πάμε για Bolzano στη συνάρτηση $h(x) = 4f(x) - \left[f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)\right]$ στο διάστημα $[0, 1]$

$$h(0) = 4f(0) - \left[f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)\right]$$

$$= 8 - \left[f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)\right] \quad \textbf{(1)}$$

$$h(1) = 4f(1) - \left[f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) \right]$$

$$= 16 - \left[f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) \right] \quad \textbf{(2)}$$

$f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ είναι γνησίως αύξουσα , οπότε

$$0 < \frac{1}{5} < 1 \quad \Rightarrow \quad f(0) < f\left(\frac{1}{5}\right) < f(1) \quad \Rightarrow \quad 2 < f\left(\frac{1}{5}\right) < 4$$

$$0 < \frac{2}{5} < 1 \quad \Rightarrow \quad f(0) < f\left(\frac{2}{5}\right) < f(1) \quad \Rightarrow \quad 2 < f\left(\frac{1}{5}\right) < 4$$

$$0 < \frac{3}{5} < 1 \quad \Rightarrow \quad f(0) < f\left(\frac{3}{5}\right) < f(1) \quad \Rightarrow \quad 2 < f\left(\frac{3}{5}\right) < 4$$

$$0 < \frac{4}{5} < 1 \quad \Rightarrow \quad f(0) < f\left(\frac{4}{5}\right) < f(1) \quad \Rightarrow \quad 2 < f\left(\frac{4}{5}\right) < 4$$

Προσθέτουμε κατά μέλη : $\quad 8 < f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) < 16$

Από τις (1) και (2) έχουμε $h(0) < 0$ και $h(1) > 0$, άρα $h(0)\,h(1) < 0$

Οπότε, σύμφωνα με το Θ. Bolzano , η h έχει ρίζα στο $(0,\ 1)$

iii)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_2 \in (0, 1)$, έτσι ώστε $f'(x_2) = 2$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\ 1]$, επομένως ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Οπότε υπάρχει $x_2 \in (0, 1)$, έτσι ώστε $f'(x_2) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 4 - 2 = 2$.

15.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{|x-z|^2-|x+\overline{z}|^2}{x^2+|z|^2}$, $x\in\mathbb{R}$, όπου $z=\alpha+\beta i$, $\alpha\neq 0$ δοσμένος μιγαδικός αριθμός.

i) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ii) Αν $|z+1|>|z-1|$, **α)** να βρείτε τα ακρότατα της f

β) να βρείτε το σύνολο τιμών της f

Προτεινόμενη λύση

i)

Παρουσιάζουμε κάθε τι που συμπεραίνουμε από τις υποθέσεις

$$f(x)=\frac{|x-z|^2-|x+\overline{z}|^2}{x^2+|z|^2}=\frac{(x-z)\overline{(x-z)}-(x+\overline{z})\overline{(x+\overline{z})}}{x^2+z\cdot\overline{z}}$$

$$=\frac{(x-z)(x-\overline{z})-(x+\overline{z})(x+z)}{x^2+z\cdot\overline{z}}$$

$$=\frac{x^2-x\cdot\overline{z}-z\cdot x+z\cdot\overline{z}-x^2-x\cdot z-\overline{z}\cdot x-z\cdot\overline{z}}{x^2+z\cdot\overline{z}}$$

$$=\frac{-2xz-2x\overline{z}}{x^2+z\cdot\overline{z}}=\frac{-2x(z+\overline{z})}{x^2+z\cdot\overline{z}}=\frac{-4\alpha x}{x^2+\alpha^2+\beta^2}\quad \textbf{(1)}$$

Οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4\alpha x}{x^2+\alpha^2+\beta^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4\alpha x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4\alpha}{x}=0$ **(2)**

Ομοίως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4\alpha}{x}=0$ **(3)**

ii)

α)

$$f'(x)=\frac{-4\alpha(x^2+\alpha^2+\beta^2)+4\alpha x(2x)}{x^2+\alpha^2+\beta^2}=\frac{4\alpha(x^2-\alpha^2-\beta^2)}{x^2+\alpha^2+\beta^2}=\frac{4\alpha(x^2-|z|^2)}{x^2+|z|^2}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{4\alpha\left(x^2-|z|^2\right)}{x^2+|z|^2}=0 \Leftrightarrow \alpha\,(x^2-|z|^2)=0$$

$$x^2=|z|^2$$

$$x=|z| \quad ή \quad x=-|z|$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{4\alpha\left(x^2-|z|^2\right)}{x^2+|z|^2}>0 \Leftrightarrow \alpha(x^2-|z|^2)>0 \quad \textbf{(4)}$$

Για το πρόσημο του α : $|z+1|>|z-1| \Leftrightarrow |\alpha+\beta i+1|>|\alpha+\beta i-1|$

$$\sqrt{(\alpha+1)^2+\beta^2}>\sqrt{(\alpha-1)^2+\beta^2}$$

$$\alpha^2+2\alpha+1+\beta^2>\alpha^2-2\alpha+1+\beta^2$$

$$4\alpha>0 \Leftrightarrow \alpha>0$$

(4) $\Leftrightarrow$ $x^2 > |z|^2$ $\Leftrightarrow$ $x < -|z|$ ή $x > |z|$

Πρόσημο της f ΄ και μονοτονία της f

x	$-\infty$		$-\lvert z\rvert$		$\lvert z\rvert$		$+\infty$
f΄		+	0	−	0	+	
f		↗	|	↘	|	↗	

Η f παρουσιάζει τ. μέγιστο για $x = -|z|$, το $f(-|z|) = \dfrac{-4\alpha(-|z|)}{|z|^2+\alpha^2+\beta^2}$

$$= \frac{4\alpha|z|}{|z|^2+|z|^2} = \frac{2\alpha}{|z|}$$

τ. ελάχιστο για $x = |z|$, το $f(|z|) =$ ………….. $= \dfrac{-2\alpha}{|z|}$

β)
Από τις (2) , (3) και τον πίνακα έχουμε

- Όταν $x \in (-\infty, -|z|]$, το σύνολο τιμών είναι το $\left(0, \dfrac{2\alpha}{|z|}\right]$ **(5)**
- Όταν $x \in [-|z|, |z|]$, το σύνολο τιμών είναι το $\left[\dfrac{-2\alpha}{|z|}, \dfrac{2\alpha}{|z|}\right]$ **(6)**
- Όταν $x \in [|z|, +\infty)$, το σύνολο τιμών είναι το $\left[\dfrac{-2\alpha}{|z|}, 0\right)$ **(7)**

Το σύνολο τιμών της f είναι η ένωση των (5) , (6), (7) , δηλαδή το $\left[\dfrac{-2\alpha}{|z|}, \dfrac{2\alpha}{|z|}\right]$

16.

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $(0, +\infty)$, τέτοια ώστε

$$f(x) = \frac{1}{x} + \int_1^x \frac{tf(t)}{x^2}dt \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

i) Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$

ii) Δείξτε ότι $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$

iii) Βρείτε το σύνολο τιμών της f

iv) Βρείτε τις ασύμπτωτες της f

Μη συγχέουμε τη μεταβλητή t μέσα στο ολοκλήρωμα με τη μεταβλητή x της συνάρτησης

Προτεινόμενη λύση

i)

$$f(x) = \frac{1}{x} + \int_1^x \frac{tf(t)}{x^2}dt \iff f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\int_1^x tf(t)dt \quad \textbf{(1)}$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, το ολοκλήρωμα είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $(0, +\infty)$. Επίσης παραγωγίσιμες είναι οι συναρτήσεις $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ στο $(0, +\infty)$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

ii)

$$(1) \Rightarrow x^2f(x) = x + \int_1^x tf(t)dt \Rightarrow \left(x^2f(x)\right)' = \left(x + \int_1^x tf(t)dt\right)'$$

$$2xf(x) + x^2 f'(x) = 1 + xf(x)$$

$$x^2 f'(x) + xf(x) = 1$$

$$x f'(x) + f(x) = \frac{1}{x}$$

$$(xf(x))' = (\ln x)'$$

$$xf(x) = \ln x + c \quad \textbf{(2)}$$

Η (1) για $x = 1$ δίνει $f(1) = 1$

Η (2) για $x = 1$ δίνει $f(1) = c$. Άρα $c = 1$

Η (2) γίνεται $xf(x) = \ln x + 1 \iff f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}, \quad x > 0$

iii)

$$f'(x) = \frac{1-1-\ln x}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff \frac{-\ln x}{x^2} = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1$$

$$f'(x) > 0 \iff \frac{-\ln x}{x^2} > 0 \iff \ln x < 0 \iff x < 1$$

Πρόσημο της f ΄ και μονοτονία της f

x	0 1 $+\infty$
f ΄	+ 0 −
f	↗ | ↘

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο για x = 1, το f(1) = 1

Ακόμα

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1+\ln x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to 0}(1+\ln x) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\ln x}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

Το σύνολο τιμών της f είναι

$f(A) = (-\infty,\ 1] \cup (0,\ 1] = (-\infty,\ 1]$

iv)

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$, η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη

Επίσης, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

17.

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R, τέτοια ώστε να ισχύει $f(0) = 0$ και

$$2f'(x) = e^{x-f(x)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

i) Να δειχθεί ότι $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)$

ii) Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x f(x-t)dt}{\eta\mu x}$

iii) Αν $h(x) = \int_{-x}^{x} t^{2010} f(t)dt$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \dfrac{x^{2012}}{2012}$, $x \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iv) Δείξτε ότι η εξίσωση $\int_{-x}^{x} t^{2010} f(t)dt = \dfrac{1}{2013}$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(0, 1)$.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$2f'(x) = e^{x-f(x)} \Leftrightarrow 2f'(x) = \frac{e^x}{e^{f(x)}}$$

$$f'(x)\, e^{f(x)} = \frac{e^x}{2}$$

$$\left(e^{f(x)}\right)' = \left(\frac{e^x}{2}\right)'$$

$$e^{f(x)} = \frac{e^x}{2} + c$$

Πάμε για ισότητα παραγώγων

Για $x = 0$ έχουμε $e^{f(0)} = \dfrac{e^0}{2} + c \Rightarrow e^0 = \dfrac{1}{2} + c \Rightarrow c = \dfrac{1}{2}$

Οπότε $e^{f(x)} = \dfrac{e^x}{2} + \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \ln e^{f(x)} = \ln\dfrac{e^x+1}{2} \Leftrightarrow f(x) = \ln\dfrac{e^x+1}{2}$

ii)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(x-t)dt}{\eta\mu x}$$

Η εμφάνιση των $f(xt)$
$f(x-c)$
οδηγεί σε ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Για τον αριθμητή έχουμε $I = \int_0^x f(x-t)dt$

Θέτουμε $x - t = u$ οπότε $dt = -du$

Για $t = 0$ είναι $u = x$ και για $t = x$ είναι $u = 0$

Άρα $I = \int_x^0 -f(u)du = -\int_x^0 f(u)du = \int_0^x f(u)du$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x f(x-t)dt}{\eta\mu x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x f(u)du}{\eta\mu x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\int_0^x f(u)du\right)'}{(\eta\mu x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{f(0)}{\sigma\upsilon\nu 0} = 0$$

iii)

$$h(x)=\int_{-x}^{x}t^{2010}f(t)dt = \int_{-x}^{0}t^{2010}f(t)dt+\int_{0}^{x}t^{2010}f(t)dt = -\int_{0}^{-x}t^{2010}f(t)dt+\int_{0}^{x}t^{2010}f(t)dt$$

$$h'(x) = -(-x)^{2010}f(-x)(-x)'+x^{2010}f(x) = -x^{2010}f(-x)+x^{2010}f(x)$$

$$= x^{2010}[f(x)-f(-x)]$$

$$= x^{2010}\left[\ln\frac{e^{x}+1}{2}-\ln\frac{e^{-x}+1}{2}\right]$$

$$= x^{2010}\left(\ln\frac{\frac{e^{x}+1}{2}}{\frac{e^{-x}+1}{2}}\right) = x^{2010}\left(\ln\frac{e^{x}+1}{e^{-x}+1}\right)$$

$$= x^{2010}\left(\ln\frac{e^{x}+1}{\frac{1}{e^{x}}+1}\right)$$

$$= x^{2010}\left(\ln\frac{e^{x}(e^{x}+1)}{e^{x}+1}\right)$$

$$= x^{2010}\ln e^{x} = x^{2010}\cdot x = x^{2011}$$

Αλλά $g'(x) = \left(\dfrac{x^{2012}}{2012}\right)' = x^{2011}$, άρα $h'(x)=g'(x) \Leftrightarrow h(x)=g(x)+c$

Όμως $h(0)=g(0)=0$, οπότε $c=0$, άρα $h(x)=g(x)$.

iv)

Επειδή δείξαμε ότι $\int_{-x}^{x}t^{2010}f(t)dt=\dfrac{x^{2012}}{2012}$, αρκεί να δείξουμε ότι

η εξίσωση $\dfrac{x^{2012}}{2012}=\dfrac{1}{2013}$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0,\ 1)$

Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=\dfrac{x^{2012}}{2012}-\dfrac{1}{2013}$ συνεχής στο $[0,\ 1]$.

$\varphi(0)=-\dfrac{1}{2013}<0$ και $\varphi(1)=\dfrac{1}{2012\cdot 2013}>0$

Άρα, από το θεώρημα Bolzano, θα υπάρχει $\xi\in(0,\ 1)$ έτσι ώστε $\varphi(\xi)=0$

Επιπλέον έχουμε ότι $\varphi'(x)=x^{2011}>0$ για κάθε $x\in(0,\ 1)$, άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η ρίζα είναι μοναδική.

18.

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

i) Δείξτε ότι $\int_0^3 f(2x+1)dx = \frac{1}{2}\int_1^7 f(x)dx$

ii) Αν $4\int_0^3 f(2x+1)dx = \int_1^7 f(x)dx + 2011$, δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 7)$ ώστε $f(\xi) = \frac{2011}{6}$

Προτεινόμενη λύση

i)

Θέτουμε $2x + 1 = u$, οπότε $du = 2dx$

Για $x = 0$, τότε $u = 1$ και για $x = 3$, τότε $u = 7$.

Επομένως $\int_0^3 f(2x+1)dx = \int_1^7 \frac{1}{2} f(u)du = \frac{1}{2}\int_1^7 f(u)du = \frac{1}{2}\int_1^7 f(x)dx$

ii)

$$4\int_0^3 f(2x+1)dx = \int_1^7 f(x)dx + 2011 \overset{(i)}{\Rightarrow} 4\cdot\frac{1}{2}\int_1^7 f(x)dx = \int_1^7 f(x)dx + 2011$$

$$\int_1^7 f(x)dx = 2011 \quad \textbf{(1)}$$

Θεωρούμε μια αρχική συνάρτηση της f, την $h(x) = \int_1^x f(t)dt$, $x \in [1, 7]$

Δοκιμάζουμε Bolzano. Αν δεν περπατάει, πάμε σε Rolle ή Θ.Μ.Τ

Θ.Μ.Τ $\Rightarrow$ υπάρχει $\xi \in (1, 7)$, ώστε $h'(\xi) = \frac{h(7)-h(1)}{7-1} = \frac{h(7)-h(1)}{6}$ **(2)**

Αλλά $h(1) = \int_1^1 f(t)dt = 0$ και $h(7) = \int_1^7 f(t)dt \overset{(1)}{=} 2011$

$(2) \Rightarrow h'(\xi) = \frac{2011-0}{6} = \frac{2011}{6}$

h αρχική της f $\Rightarrow$ $h'(x) = f(x)$ $\Rightarrow$ $h'(\xi) = f(\xi)$

$$\frac{2011}{6} = f(\xi)$$

19.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3$ και πραγματικός αριθμός $\alpha \in (0,\ 1)$.

Να βρείτε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου, που ορίζεται από τη C_f και τις ευθείες με εξισώσεις $y = f(\alpha)$, $x = 0$, $x = 1$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $E(\alpha) \geq \dfrac{7}{32}$

Προτεινόμενη λύση

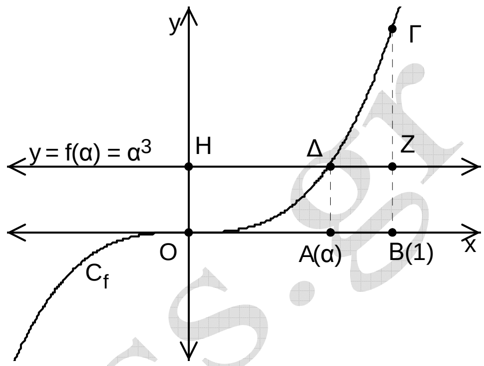
ii)

Το εμβαδόν $E(\alpha)$ οριζόντια βρίσκεται μεταξύ των ευθειών $x = 0$, $x = 1$, άρα τα άκρα ολοκλήρωσης είναι 0 και 1.

Σημεία τομής :

Η ευθεία $y = f(\alpha) = \alpha^3$ τέμνει τη C_f στο Δ, άρα $\Delta(\alpha,\ \alpha^3)$ και την κατακόρυφη από το $B(1)$ στο Z. Τέλος η κατακόρυφη από το $B(1)$ τέμνει τη C_f στο Γ.

Πρόχειρη γραφική παράσταση



$$E(\alpha) = (H O \Delta) + (\Delta Z \Gamma) = \int_0^{\alpha}(\alpha^3 - x^3)dx + \int_{\alpha}^{1}(x^3 - \alpha^3)dx$$

$$= \left[\alpha^3 x - \frac{x^4}{4}\right]_0^{\alpha} + \left[\frac{x^4}{4} - \alpha^3 x\right]_{\alpha}^{1}$$

$$= \left(\alpha^4 - \frac{\alpha^4}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \alpha^3\right) - \left(\frac{\alpha^4}{4} - \alpha^4\right) = \frac{3}{2}\alpha^4 - \alpha^3 + \frac{1}{4}$$

iii)

Έστω η συνάρτηση $E(\alpha) = \dfrac{3}{2}\alpha^4 - \alpha^3 + \dfrac{1}{4}$, $0 < \alpha < 1$

$E'(\alpha) = 6\alpha^3 - 3\alpha^2$

$E'(\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6\alpha^3 - 3\alpha^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\alpha^2(2\alpha - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \dfrac{1}{2}$

Πρόσημο της E' και μονοτονία της E

α	0	1/2	1
E΄	–	0	+
E	↘	|	↗

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η E παρουσιάζει ελάχιστο για $\alpha = \dfrac{1}{2}$, το $E\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{7}{32}$

Είναι λοιπόν $E(\alpha) \geq E\left(\dfrac{1}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad E(\alpha) \geq \dfrac{7}{32}$

20.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - x$, $x \in \mathbb{R}$ και $0 < \alpha < 1$.

i) Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

iii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει

$$\alpha^{\lambda^2-4} - \alpha^{\lambda-2} = (\lambda^2-4)-(\lambda-2).$$

iv) Να λύσετε την ανίσωση $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-5} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x} + 2x - 5$

Προτεινόμενη λύση

i)

$f'(x) = \alpha^x \ln\alpha - 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha^x \ln\alpha - 1 = 0$

$\alpha^x \ln\alpha = 1$ αδύνατη

(1^o μέλος αρνητικό , αφού $0< \alpha < 1$ και 2^o θετικό)

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \alpha^x \ln\alpha - 1 > 0$

$\alpha^x \ln\alpha > 1$

$\alpha^x < \frac{1}{\ln\alpha}$ αδύνατη (1^o μέλος θετικό , και 2^o αρνητικό)

Άρα $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

$f''(x) = \alpha^x \ln^2\alpha > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

ii)

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (\alpha^x - x) = 0-(+\infty) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (\alpha^x - x) = (+\infty) - (-\infty) = +\infty$

Άρα $f(A) = \mathbb{R}$

Προσαρμόζουμε τα στοιχεία
της εξίσωσης στην f

iii)

$\alpha^{\lambda^2-4} - \alpha^{\lambda-2} = (\lambda^2-4)-(\lambda-2) \Leftrightarrow \alpha^{\lambda^2-4} - (\lambda^2-4) = \alpha^{\lambda-2} - (\lambda-2)$

$f(\lambda^2-4) = f(\lambda-2)$ **(1)**

f γνησίως φθίνουσα $\Rightarrow$ '1—1' , οπότε (1) $\Leftrightarrow$ $\lambda^2-4 = \lambda-2$

$\lambda^2-\lambda-2 = 0$

$\lambda = 2$ ή $\lambda = -1$

Προσαρμόζουμε τα στοιχεία
της ανίσωσης στην f με α = 1/2

iv)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-5} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x} + 2x - 5 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-5} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x} + 3x - x - 5$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-5} - (3x-5) > \left(\frac{1}{2}\right)^{x} - x \qquad \textbf{(2)}$$

Για $\alpha = \frac{1}{2}$ η (2) $\Leftrightarrow$ $f(3x-5) > f(x)$ **(3)**

Και επειδή f γνησίως φθίνουσα , η (2) $\Leftrightarrow$ $3x - 5 < x$

$2x < 5$

$x < \frac{5}{2}$